Определим рациональные константы K_n, $n=1,2,\dots,$ равенствами

$$K_n = \frac{(2^{n+1}-1)|B_{n+1}|}{2^{n-1}(n+1)!}, \text{ если } n \text{ нечетное}, \quad K_n = \frac{|E_n|}{4^n n!}, \text{ если } n \text{ четное},$$

где B_n — числа Бернулли, E_n — числа Эйлера.

Константы K_n связаны с известными константами Фавара. Имеем [7]: $K_1=1/4, K_2=$ $=1/32$, $K_3=1/192$, $K_4=5/6144$, $K_5=1/7680$, $K_6=61/2949120$.

Т е о р е м а 1. *Если оператор F удовлетворяет неравенству* (4) *и периодическая задача* (3) *имеет непостоянное решение, то*

$$T \geqslant \frac{1}{(L\,K_n)^{1/n}}. \tag{5}$$

Константы K_n в неравенстве (5) неулучшаемые. Также получены неулучшаемые оценки периодов решений для операторов F, действующих в пространство суммируемых функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yorke J.* Periods of periodic solutions and the Lipschitz constant // Proc. Amer. Math. Soc. 1969. V. 22. P. 509-512.

2. *Mawhin J., Walter W.* A General Symmetry Principle and Some Implications // J. Math. Anal. Appl. 1969. V. 186. P. 778-798.

3. *Lasota A., Yorke J.A.* Bounds for periodic solutions of differential equations in Banach spaces // J. Differential Equations. 1971. V. 10. P. 83-91.

4. *Ronto A.* A note on the periods of periodic solutions of some autonomous functional differential equations // Proc. 6th Coll. Qualitative Theory of Diff. Equ., Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2000. V. 25. P. 1-15.

5. *Зевин А.А.* Точные оценки периодов и амплитуд периодических решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Доклады АН. 2007. Т. 415, № 2. С. 160-164.

6. *Zevin A.A., Pinsky M.A.* Minimal periods of periodic solutions of some Lipschitzian differential equations // Appl. Math. Lett. 2009. V. 22. P. 1562-1566.

7. *Бравый Е.И.* О наилучших константах в условиях разрешимости периодической краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений высших порядков // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48. № 6. P. 773–780.

Braviy E.I. MINIMAL PERIODS OF PERIODIC SOLUTIONS TO NON-AUTONOMIC FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH LIPSCHITZ NONLINEARITIES

Unimprovable estimates of minimal periods of periodic solutions to functional differential equations are obtained.

Key words: minimal periods; functional differential equations; higher order differential equations.

УДК 517.968.4

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

© **Е.О. Бурлаков, Е.С. Жуковский, А.И. Шиндяпин**

Ключевые слова: интегральные уравнения Volterra с запаздыванием; интегральные неравенства.

Исследуется интегральное уравнение с запаздыванием относительно суммируемой функции, определенной на бесконечном промежутке «времени», и возможно неограниченном множестве «пространственных» переменных. Данное уравнение описывает нейронную модель коры головного мозга. Получено утверждение о неравенстве, гарантирующее существование решения, меньшего заданной суммируемой функции.

Пусть задано замкнутое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Определим банахово пространство $L(T)$ суммируемых функций $u:(-\infty,T]\times\Omega\to\mathbb{R}^n$ с нормой $\|u\|=\int_{-\infty}^{T}\int_{\Omega}|u(t,x)|\,dx\,dt$. Пусть L — пространство таких функций $u:\mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{R}^n$, сужения которых на $(-\infty,T]$ при любом конечном значении T являются элементами пространства $L(T)$. Определим в $\mathbb{R}^n$ естественный порядок, порожденный неотрицательным октантом $\mathbb{R}^n_+$, а в пространствах $L(T)$, L — конусом функций с неотрицательными компонентами.

Пусть заданы функции $F:(\mathbb{R}\times\Omega)^2\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ и $\tau:\mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{R}_+$.

Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$u(t,x)=\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{\Omega}F\big(t,x,s,y,u\big(s-\tau(s,x,y),y\big)\big)\,dy\,ds, \tag{1}$$

являющееся обобщением моделей, используемых в работах [1–3] для описания процессов коры головного мозга.

Решением уравнения (1), определенным на полубесконечном интервале $(-\infty,T]$, $T<\infty$, называем функцию $u\in L(T)$, удовлетворяющую этому уравнению почти всюду на $(-\infty,T]$. Функцию $u:(-\infty,\eta)\times\Omega\to\mathbb{R}^n$, $\eta\leqslant\infty$, называем (см. [4]) предельно продолженным решением уравнения (1), если при любом $T<\eta$ сужение u_T на $(-\infty,T]$ функции u является решением этого уравнения и либо $\eta=\infty$, либо $\lim_{T\to\eta-0}\|u_T\|=\infty$.

Пусть при любом $u\in\mathbb{R}^n$ функция $F(\cdot,u):(\mathbb{R}\times\Omega)^2\to\mathbb{R}^n$ измерима, при почти всех $(t,x,s,y)\in\mathbb{R}\times\Omega\times\mathbb{R}\times\Omega$ и любых $j=\overline{1,n}$, $i=\overline{1,n}$, $i\neq j$, $u_i\in\mathbb{R}$, функция $F(t,x,s,y,u_1,...,u_{j-1},\cdot,u_j,...,u_n):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ непрерывна слева. Как показано И.В. Шрагиным (см. [5],[6]) эти условия обеспечивают измеримость суперпозиции $(t,x,s,y)\mapsto$ $\mapsto F\big(t,x,s,y,u(s,y)\big)$ для любой измеримой функции $(s,y)\mapsto u(s,y)$. Кроме того, будем предполагать, что существуют такие функции $A,B\in L$, что при почти всех $(t,x,s,y)\in\mathbb{R}\times$ $\times\Omega\times\mathbb{R}\times\Omega$ и любых $u\in\mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$|F(t,x,s,y,u)|\leqslant A(t,x)\big(|u|+B(s,y)\big).$$

Далее, пусть функция $\tau:\mathbb{R}\times\Omega^2\to\mathbb{R}_+$ измерима и при любых $(x,y)\in\Omega^2$ функция $h_{(x,y)}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h_{(x,y)}(t)=t-\tau(t,x,y)$ удовлетворяет условию [7, c. 707]: для любого измеримого множества $e\subset\mathbb{R}$, мера которого $\mathrm{mes}(e)<\infty$, множество

$$h^{-1}_{(x,y)}(e)=\{t\in\mathbb{R}\ :\ h_{(x,y)}(t)\subset e\}$$

измеримо, и выполнено

$$\sup_{e\,:\,\mathrm{mes}(e)>0}\frac{\mathrm{mes}\big(h^{-1}_{(x,y)}(e)\big)}{\mathrm{mes}(e)}<\infty.$$

Следующее утверждение является аналогом теорем [8,9] об интегральных неравенствах, применительно к уравнению (1).

Т е о р е м а. *Пусть при почти всех* $(t,x,s,y)\in\mathbb{R}\times\Omega\times\mathbb{R}\times\Omega$ *функция* $F(t,x,s,y,\,\cdot\,):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *не убывает и существует функция* $w_0\in L$, *удовлетворяющая неравенству*

$$w_0(t,x)\geqslant\int\limits_{-\infty}^{t}\int\limits_{\Omega}F\big(t,x,s,y,w_0\big(s-\tau(s,x,y),y\big)\big)\,dy\,ds.$$

Тогда существует решение u_T *уравнения* (1), *определенное на некотором интервале* $(-\infty, T]$, *удовлетворяющее при почти всех* $(t,x) \in (-\infty, T] \times \Omega$ *неравенству* $u_T(t,x) \leqslant \leqslant w_0(t,x)$; *любое решение* $u_\gamma : (-\infty, \gamma] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ *уравнения* (1), *для которого почти всюду на* $(-\infty, \gamma] \times \Omega$ *выполнено* $u_\gamma(t,x) \leqslant w_0(t,x)$, *можно продолжить до предельно продолженного решения* u, *которое будет удовлетворять на всей своей области определения неравенству* $u(t,x) \leqslant w_0(t,x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wilson H.R, Cowan J.D.* Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons // Biophys. J. 1972. № 12. C. 1-24.

2. *Venkov N.A., Coombes S., Matthews P.C.* Dynamic instabilities in scalar neural field equations with space-dependent delays // Physica D. 2007. № 232. C. 1-15.

3. *Faye G., Faugeras O.* Some theoretical and numerical results for delayed neural field equations // Physica D. 2010. № 239. C. 561-578.

4. *Жуковский Е.С.* Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра // Математический сборник. 2006. Т. 197. № 10. С. 33–56.

5. *Шрагин И.В.* Измеряемость суперпозиций разрывных функций // Труды Тамб. ин-та хим. машиностроения. 1969. С. 6-8.

6. *Шрагин И.В.* Суперпозиционная измеримость // Известия вузов. Математика. 1975. № 1. С. 82–92

7. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. М.: ИЛ, 1962. 896 с.

8. *Азбелев Н.В., Цалюк Б.З.* Об интегральных неравенствах // Математический сборник, 1962. Т. 56. № 3. С. 325–342.

9. *Жуковский Е.С.* Об интегральных неравенствах в пространствах суммируемых функций // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18. № 4. С. 580-584.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 11-01-00626-а) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013гг. (соглашение № 14.132.21.1348).

Burlakov E.O., Zhukovskiy E.S., Shindiapin A.I. ON CLASS OF VOLTERRA INTEGRAL INEQUALITIES

We investigate the integral equation with delay with respect to integrable function defined on infinite «time» interval and non-necessarily bounded «space» variable set. This equation describes the neuronal model of the cortical tissue. We obtain the statement on inequality, which guarantee existence of a solution majorized by a given integrable function.

Key words: Volterra integral equations with delay, integral inequalities.

УДК 517.968.4

ON WELL-POSEDNESS OF GENERALIZED NEURAL FIELD MODELS

© E. Burlakov, A. Ponosov, J. Wyller

Ключевые слова: neural field equations; Well-posedness.

We obtain conditions for existence of a unique global or maximally extended solution to generalized neural field equation and continuous dependence of this solution on spatiotemporal integration kernel, on delay effects, firing rate, and history function.

Firing rate models are used in the investigation of network properties of the strongly interconnected cortical networks. In neural field models the cortical tissue has in addition been modeled